Les trois parties de ce problème sont très largement indépendantes et peuvent se traiter dans un ordre indifférent.

Partie A

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$, où la matrice A est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

A 1° Démontrer que les réels 2 et 4 sont deux valeurs propres de u et déterminer une base des deux sous espaces propres correspondants .

A 2° Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que l'endomorphisme u admette relativement à la base $\mathcal{B}'$ la matrice $A' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On choisira les coordonnées des vecteurs de cette nouvelle base parmi $1, 0, -1$

A 3° Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n en fonction de n.
A 4° x, y, z désignant trois fonctions réelles de classe C^1 , déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 8x(t) - y(t) - 5z(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) + z(t) \\ z'(t) = 4x(t) - y(t) - z(t) \end{cases}$$

Partie B

B 1° Déterminer les fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f''(t) + f'(t) + f(t) = 0 \tag{1}$$

(les solutions ne doivent donc pas s'exprimer à l'aide de nombres complexes)
B 2° Montrer que l'ensemble F des solutions de (1) forme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel dont on précisera une base (φ_1, φ_2).

Donner l'allure du graphe d'une solution non nulle de (1)

B 3° Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de F.
Cet endomorphisme D est il diagonalisable? Déterminer D^3.
B 4° Soit $a \in \mathbb{R}$. On note T_a l'application définie par :

$$\forall f \in F, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_a(f)(x) = f(x + a)$$

Montrer que T_a est un endomorphisme de F. Pour quelles valeurs du réel a l'endomorphisme T_a est il diagonalisable? Quelle propriété du graphe de f tracé au $B2°$ peut on en déduire?

B 5° Déterminer l'ensemble des couples $(\lambda, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que $D = \lambda T_a$

.

Partie C

Dans cette partie on note $E = C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *l'espace vectoriel des fonctions de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *On considère le sous ensemble* F *de* E *formé des fonctions réelles de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+$ *telles que la fonction* $t \mapsto f^2(t)$ *soit intégrable sur* $[0, +\infty[$. *On notera*

$$N_2(f) = \sqrt{\int_{[0,+\infty[} f^2(t)dt}$$

C 1° Soient f et g deux éléments de F.
Démontrer que la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$
C 2° Démontrer que F est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
C 3° Soit u une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une limite l, finie ou non, lorsque x tend vers $+\infty$. On suppose que la primitive nulle en 0 de u, notée U, admet une limite finie $L = \lim_{x\to+\infty} U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Démontrer que $l = 0$.

Dans ce qui suit f *est une fonction de* E *telle que* f *et* f'' *appartiennent à* F.
C 4° Justifier que pour tous x, a, b appartenant à $[0, +\infty[$:

$$\int_0^x [f'(t)]^2\, dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)dt \tag{2}$$

$$\int_a^b f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}([f(b)]^2 - [f(a)]^2) \tag{3}$$

Montrer alors, en utilisant les deux égalités (2) et (3), que la fonction f' appartient à F. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.
C 5° En déduire alors que les deux fonctions suivantes admettent une limite finie lorsque $x \to +\infty$:

$$x \mapsto \int_0^x f(t)f'(t)dt \text{ et } x \mapsto \int_0^x f'(t)f''(t)dt$$

En déduire également que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f^2(x) = \lim_{x\to+\infty} (f'(x))^2 = 0$

C 6° Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$[f(t) + f'(t) + f''(t)]^2 - \left([f(t)]^2 + [f''(t)]^2 - [f'(t)]^2\right) = \left([f + f']^2\right)'(t)$$

En déduire que

$$\int_{[0,+\infty[} [f(t)]^2\, dt + \int_{[0,+\infty[} [f''(t)]^2\, dt - \int_{[0,+\infty[} [f'(t)]^2\, dt = [f(0) + f'(0)]^2 + \int_{[0,+\infty[} [f(t) + f'(t) + f''(t)]^2\, dt$$

puis que

$$N_2(f')^2 \leq N_2(f)^2 + N_2(f'')^2 \tag{4}$$

C 7° En considérant, pour tout réel λ strictement positif, les fonctions f_λ définies par:
$f_\lambda(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$, déduire de (4) que

$$N_2(f')^2 \leq \frac{1}{\lambda^2} N_2(f)^2 + \lambda^2 N_2(f'')^2 \tag{5}$$

C 8° Déduire de (5) que

$$N_2(f') \leq \sqrt{2N_2(f)N_2(f'')} \tag{6}$$

C 9° Soit f une fonction solution de l'équation différentielle (1) de la partie B, et telle que:
$f(0) + f'(0) = 0$.
Montrer que f et f'' appartiennent à F. En déduire que l'inégalité (6) ne peut être améliorée.